Odgłosy z jaskini (16)
Małpy trzymają się mocno

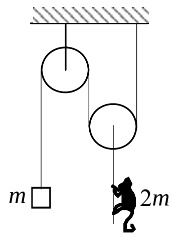
Adam Smólski

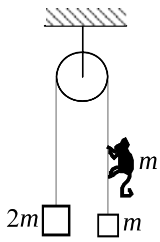
Zadania o małpach zniknęły z polskiego Lwiątka po tym, jak w roku 2004 zdarzyła się przykra wpadka – w zadaniu 30 (w zestawach licealnych), w którym w ostatniej chwili zmieniałem dane, zabrakło poprawnej odpowiedzi. Obietnicy „nigdy więcej małpy" dotrzymujemy, choć tradycyjnie ostatnie zadanie jest o zwierzątkach (w tym roku o gołębiach pocztowych).

Natomiast w Lwiątku ukraińskim małpy trzymają się mocno. Okazuje się, że z ogólnego pomysłu (bloczek, lina i małpy, które się po niej wspinają) można jeszcze „wycisnąć" coś nowego. Oto kilka ukraińskich zadań z niedawnych lat:

W zrównoważonym układzie (blok i liny są nieważkie, tarcie nie występuje) ciało (m) i małpa ($2m$) pozostają nieruchome. Małpa zaczyna poruszać się w górę z prędkością 4 m/s względem ziemi. Jaką prędkość uzyska ciało (m) i jak jest ona zwrócona względem ziemi? (↑ – ku górze, ↓ – ku dołowi)

A: ↑ , 2 m/s; **B:** ↓ , 2 m/s; **C:** ↑ , 4 m/s; **D:** ↓ , 4 m/s; **E:** ↑ , 8 m/s.



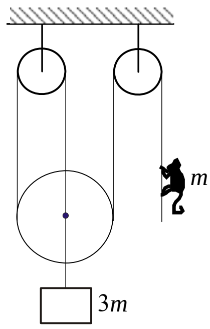


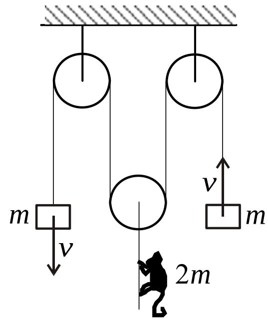
W zrównoważonym układzie (blok i liny są nieważkie, tarcie nie występuje) ciała (m i $2m$) i małpa (m) pozostają nieruchome. Małpa zaczyna poruszać się w górę z prędkością 3 m/s względem ziemi. Jaką pracę wykona małpa w ciągu 2 sekund?

A: 2 mg; **B:** 3 mg; **C:** 6 mg; **D:** 8 mg; **E:** 12 mg.

W zrównoważonym układzie (blok i liny są nieważkie, tarcie nie występuje) ciało ($3m$) i małpa (m) pozostają nieruchome. Małpa zaczyna poruszać się w górę z prędkością 6 m/s względem ziemi. Ile jest równa prędkość małpy względem liny?

A: 2 m/s; **B:** 3 m/s; **C:** 6 m/s; **D:** 12 m/s; **E:** 24 m/s.





W zrównoważonym układzie (blok i liny są nieważkie, tarcie nie występuje) małpa (m) pozostaje nieruchoma, zaś ciała (m) poruszają się z prędkością v (1 – w dół, 2 – ku górze). Małpa zaczyna poruszać się po linie w górę z prędkością v względem ziemi. Jak będą poruszać się ciała? ($\uparrow$ – ku górze, $\downarrow$ – ku dołowi).

A: $v_1 = v\downarrow, v_2 = 2v\uparrow$; **B:** $v_1 = v\uparrow, v_2 = 2v\downarrow$;
C: $v_1 = 2v\downarrow, v_2 = 3v\uparrow$; **D:** $v_1 = 2v\uparrow, v_2 = 3v\downarrow$;
E: $v_1 = 0,\ v_2 = 2v\uparrow$.

i z tym samym rysunkiem:

W zrównoważonym układzie (blok i liny są nieważkie, tarcie nie występuje) małpa (m) pozostaje nieruchoma, zaś ciała (m) poruszają się z prędkością v (1 – w dół, 2 – ku górze). Małpa zaczyna poruszać się po linie w górę z prędkością $2v$ względem ziemi. Ile jest równa prędkość małpy względem liny?

A: $v_m = 0$; **B:** $v_m = v$; **C:** $v_m = 2v$; **D:** $v_m = 4v$; **E:** $v_m = 6v$.

Swego czasu w ramach zakopiańskiego „Przedszkola fizycznego" namawiałem uczestników, by zaproponowali jakieś własne zadania w ramach tego samego „paradygmatu" – bloki, ciężarki i małpy na linie. Zrobiliśmy nawet konkurs, z pluszową małpką jako nagrodą. Napływ pomysłów nie był oszałamiający, sprawozdanie pod tytułem „Pożegnanie z małpą" znajduje się w numerze 4 „Fizyki w Szkole" z roku 2004.

Z „Zakopiańskim Przedszkolem Fizyki" łączy mi się jeszcze jedno małpie wspomnienie. Zofia Gołąb-Meyer podsunęła uczestnikom problem:

Dwie małpy w kosmosie (masa każdej M), w stanie nieważkości, przerzucają między sobą piłkę (masa m), nadając jej we własnym (dotychczasowym) układzie odniesienia prędkość v. Pytanie: po ilu rzutach ta zabawa się skończy? W stanie początkowym małpy względem siebie spoczywają.

To zadanie, w wersji z kosmonautami, było już dyskutowane w „Fotonie" wiele lat temu. Tutaj chciałbym zaprezentować rozwiązanie, które wydaje mi się szybkie i zgrabne:

Rozważmy sytuację tuż przed n-tym rzutem. Niech w_n oznacza wartość prędkości jednej małpy względem drugiej. Małpę, która w tym momencie trzyma piłkę, nazwijmy małpą A, zaś tę drugą małpą B. Jeśli $w_n < v$, zabawa może być kontynuowana. Niech U oznacza układ odniesienia poruszający się jednostajnie wraz z małpą A, zanim ta wyrzuciła piłkę. Małpa A wyrzuca piłkę, nadając jej w układzie U prędkość o wartości v. Sama uzyskuje przy tym w układzie

U prędkość o wartości $\frac{m}{M}\upsilon$ i zwrocie, oczywiście, w stronę przeciwną do B.

Małpa B łapie piłkę. Do tej pory miała w układzie U prędkość o wartości w_n, zatem wartość x jej prędkości w układzie U po złapaniu piłki wyznaczymy z równania

$$Mw_n + m\upsilon = (M+m)x$$

Jak widać, $x = \frac{Mw_n + m\upsilon}{M+m}$.

Względna prędkość małpy B względem A ma zatem wartość

$$w_{n+1} = \frac{Mw_n + m\upsilon}{M+m} + \frac{m}{M}\upsilon .$$

Ciąg wartości w_n można zatem obliczać rekurencyjnie:

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_{n+1} = \dfrac{Mw_n + m\upsilon}{M+m} + \dfrac{m}{M}\upsilon \end{cases}.$$

Po oznaczeniu $\frac{m}{M} = k$ i przekształceniu:

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{1+k} w_n + \dfrac{k(2+k)}{1+k}\upsilon \end{cases}.$$

Jawny wzór na w_n możemy uzyskać w następujący sprytny sposób: zdefiniujmy ciąg $u_n = w_n - p$, dobierając p tak, by ciąg u_n okazał się geometryczny:

$$u_{n+1} + p = \frac{1}{1+k}(u_n + p) + \frac{k(2+k)}{1+k}\upsilon$$

daje $u_{n+1} = \frac{1}{1+k}u_n + \frac{k(2+k)}{1+k}\upsilon - \frac{k}{1+k}p$, zatem przy $p = (2+k)\upsilon$ uzyskujemy żądaną własność u_n:

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+k}u_n ,$$

czyli

$$u_n = \left(\frac{1}{1+k}\right)^{n-1} u_1$$

i dalej

$$w_n - p = \left(\frac{1}{1+k}\right)^{n-1} (w_1 - p) ,$$

skąd

$$w_n = \left(\frac{1}{1+k}\right)^{n-1}(w_1 - p) + p\,.$$

Wstawiając $p = (2+k)\upsilon$, $w_1 = 0$, dostajemy

$$w_n = (2+k)\left[1 - \left(\frac{1}{1+k}\right)^{n-1}\right]\upsilon\,.$$

Jak widać, ta wartość po pewnej liczbie kroków zawsze przekroczy υ, co będzie oznaczało koniec gry. Dokładnie, maksymalna liczba rzutów to największa liczba całkowita nie większa od $\dfrac{\log(2+k)}{\log(1+k)}$. W zadaniu można by jeszcze pytać o czas gry, tutaj jednak rachunek wygląda na tak mozolny, że aż chyba nieciekawy.

Autor Adam Smólski (z lewej) z „lwiętami”, Zakopiańskie Przedszkole Fizyki 2004