KĄCIK ZADAŃ

Odgłosy z jaskini (7) – Nieintuicyjne „padnij”

Adam Smólski
I Społeczne LO w Warszawie

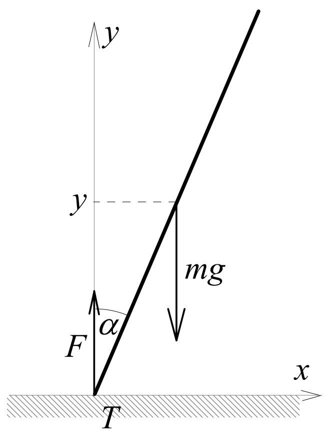
Oto zadanie z zestawu Lwiątka 2007 dla III i IV klas liceum i technikum.

12. *Lekko odchylony od pionu słup przewraca się na jedną stronę bez przesunięcia punktu oparcia o ziemię. Przyspieszeniem stycznym nazywamy składową wektora przyspieszenia styczną do toru. Środek masy słupa porusza się po łuku okręgu*

A. ruchem o rosnącym przyspieszeniu stycznym,
B. ruchem o stałym przyspieszeniu stycznym,
C. ruchem o malejącym przyspieszeniu stycznym,
D. ruchem jednostajnym z niezerową prędkością.
E. Środek masy słupa nie porusza się.

Poprawna jest odpowiedź A, co wynika z faktu, że moment siły przyspieszający obrót słupa jest coraz większy w miarę, jak słup się przewraca.

A gdyby pozwolić na przesuwanie się punktu podparcia (robimy „padnij” na lodzie)? Na słup działają w takim wypadku wyłącznie siły pionowe – ciężar zaczepiony w środku słupa i siła reakcji podłoża działająca na jego koniec.



Środek masy słupa porusza się zatem po pionowym odcinku. Jego współrzędna pionowa spełnia równanie

$$m\ddot{y} = F - mg\,. \tag{1}$$

Ponadto $y = l\cos\alpha$ ($2l$ to długość słupa) co po dwukrotnym zróżniczkowaniu daje

$$\ddot{y} = -l\varepsilon\sin\alpha - l\omega^2\cos\alpha \tag{2}$$

(ω to prędkość kątowa słupa, a ε to jego przyspieszenie kątowe).

Równania (1) i (2) dają łącznie

$$F = mg - ml\varepsilon\sin\alpha - ml\omega^2\cos\alpha \tag{3}$$

Przyspieszenie kątowe spełnia drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego: $\varepsilon = \dfrac{Fl\sin\alpha}{I}$, gdzie $I = \dfrac{1}{3}ml^2$ czyli

$$\varepsilon = \frac{3F\sin\alpha}{ml}\,. \tag{4}$$

Natomiast prędkość kątową możemy obliczyć z zasady zachowania energii: $\dfrac{m\mathbf{v}^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha)$. Liniowa prędkość v środka masy to $\dot{y} = -l\omega\sin\alpha$, zatem $\dfrac{1}{2}\left(ml^2\sin^2\alpha + I\right)\omega^2 = mgl(1-\cos\alpha)$, skąd, po uwzględnieniu $I = \dfrac{1}{3}ml^2$,

$$\omega^2 = \frac{6g(1-\cos\alpha)}{l\left(1+3\sin^2\alpha\right)}\,. \tag{5}$$

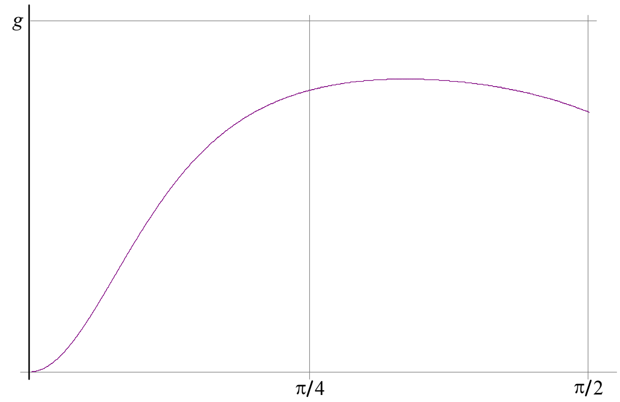
Wstawienie (4) i (5) do (3) daje po uproszczeniu

$$F = mg\frac{4-6\cos\alpha+3\cos^2\alpha}{\left(4-3\cos^2\alpha\right)^2}\,, \tag{6}$$

a w konsekwencji

$$-\ddot{y} = mg\left[1 - \frac{4-6\cos\alpha+3\cos^2\alpha}{\left(4-3\cos^2\alpha\right)^2}\right]. \tag{7}$$

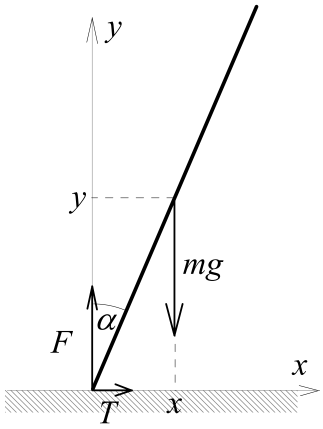
Cóż, z samego wzoru niewiele widać, narysujmy wykres:



Ciekawe i chyba nieintuicyjne, że przyspieszenie środka słupa posiada maksimum jeszcze przed rąbnięciem słupa o ziemię. Można je wyznaczyć analitycznie, różniczkując (7) po zmiennej $\cos\alpha$. Maksimum występuje dla $\alpha \approx 61{,}5°$.

Jeśli słup robi „padnij" nie na lodzie, ale mając umocowaną oś obrotu na dolnym końcu, również pojawiają się nieintuicyjne efekty.

Umocowanie osi obrotu słupa oznacza, że siła, jaką podłoże działa na słup, posiada poziomą składową *T*. Składową pionową oznaczmy jak poprzednio *F*.



Rachunki biegną podobnie jak poprzednio, a nawet są prostsze, jeśli rozpatrujemy obrót wokół punktu podparcia. Współrzędne przyspieszenia środka masy spełniają równania $m\ddot{x} = T$, $m\ddot{y} = F - mg$. Ponadto $x = l\sin\alpha$, co po dwukrotnym zróżniczkowaniu daje

$$\ddot{x} = l\varepsilon\cos\alpha - l\omega^2\sin\alpha .$$

Wstawienie tu $\varepsilon = \dfrac{mgl\sin\alpha}{I}$, $I = \dfrac{4}{3}ml^2$, prowadzi do wyniku

$$T = m\left(\frac{3}{4}g\cos\alpha - \omega^2 l\right)\sin\alpha .$$

Zasada zachowania energii: $\frac{1}{2}I\omega^2 = mgl(1-\cos\alpha)$. Ostatecznie

$$T = \frac{3mg}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\alpha - 1\right)\sin\alpha .$$

Zauważmy, że tylko w początkowej fazie ruchu siła T zwrócona jest tak, jak na rysunku powyżej. To też jest dość nieintuicyjne. Oto wykres czynnika $\left(\frac{3}{2}\cos\alpha - 1\right)\sin\alpha$:

Czy siła T może być po prostu siłą tarcia? Tak, ale współczynnik musiałby być dość duży. Siła nacisku w końcowej fazie ruchu dąży do

$$F = mg + m\ddot{y} = mg - ml\varepsilon = mg - \frac{3}{4}mg = \frac{mg}{4},$$

a siła T dąży do $\frac{3}{2}mg$, więc współczynnik musiałby być równy co najmniej 6.

Proponuję przyjrzeć się, jak przewraca się choćby kij od szczotki – upada przesunięty nieco do przodu w stosunku do położenia, które miałby, gdyby oś obrotu była umocowana.