



## KĄCIK ZADAŃ

### Odgłosy z jaskini (6) – Droga czy przemieszczenie?

Adam Smólski

I Społeczne LO w Warszawie

W zestawach „Lwiątko 2007” jedno z końcowych zadań, a więc w zamierzeniu już dość trudnych, dotyczyło rzuconego pionowo kamienia. Podane były warunki, jakie spełnia droga przebyta przez kamień w kolejnych sekundach lotu. Na przykład klasom 1–2 gimnazjum daliśmy zadanie:

29. Rzucony pionowo w dół kamień w ciągu trzeciej sekundy lotu pokonał drogę 40 m. Jaką drogę przebył ten kamień w ciągu pierwszej sekundy lotu? Przyjmij  $g = 10 \text{ m/s}^2$  i pomini opory ruchu.

A. 8 m; B. 10 m; C. 20 m; D. 30 m;

E. Na podstawie podanych informacji nie da się tego ustalić.

Co ogólnie wiadomo o drogach w kolejnych sekundach? Konsekwencją wzoru  $s(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$  jest to, że wartości  $s(1) - s(0)$ ,  $s(2) - s(1)$ ,  $s(3) - s(2)$  itd. tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli rozpatrujemy tylko wartości liczbowe, to  $s(1) - s(0) = v_0 + \frac{g}{2}$ ,  $s(2) - s(1) = v_0 + \frac{3g}{2}$ ,  $s(3) - s(2) = v_0 + \frac{5g}{2}$  itd. Wartości te rosną zatem w kolejnych sekundach o liczbową wartość  $g$ , tzn. w przybliżeniu o 10 metrów. W szczególności gdy  $v_0 = 0$ , kolejne wyrazy ciągu to  $\frac{g}{2}$ ,  $\frac{3g}{2}$ ,  $\frac{5g}{2}$ , ..., proporcjonalnie do kolejnych liczb nieparzystych, w zgodzie ze słynnym odkryciem Galileusza.

Jeśli trzecim wyrazem ciągu jest 40 m (oczywiście przy  $v_0 \neq 0$ ), to pierwszym jest 20 m – **odpowiedź C**. Prędkość początkowa rzutu musiała wynosić 15 m/s.

W wyższych klasach kamień rzucony był w górę, np. w klasie II liceum:

29. Rzucony pionowo w górę kamień w ciągu drugiej sekundy lotu pokonał drogę 10 m. Jaką drogę przebył ten kamień w ciągu pierwszej sekundy lotu? Przyjmij  $g = 10 \text{ m/s}^2$  i pomini opory ruchu.

A. 0 m; B. 2,5 m; C. 5 m; D. 20 m;

E. Nie da się ustalić bez dodatkowych informacji.

Wspomniana wyżej zasada ciągu arytmetycznego o różnicy 10 daje się i tutaj zastosować. W drugiej sekundzie 10 m, to w pierwszej zero.... Zaraz, droga zero przy niewątpliwym ruchu? Nie droga, przemieszczenie! W ruchu, w którym możliwe jest zawracanie, wzór  $s(t) = v_0t + \frac{gt^2}{2}$  nie jest wzorem na drogę rozu-

mianą tak, jak to tradycyjnie wykładamy w szkole. To wzór na przemieszczenie (liczone od chwili 0) lub jak kto woli na współrzędną położenia na pionowej osi współrzędnych, zwróconej w dół. Przemieszczenie zero podczas pierwszej sekundy ruchu oznacza, że punkt największego wzniesienia nastąpił w połowie tej pierwszej sekundy. W ciągu pierwszej połowy tej sekundy kamień przeleciałby 1,25 m w górę, a w ciągu drugiej 1,25 m w dół, droga wyniosłaby zatem 2,5 m.

Ale to cały czas nie jest poprawna odpowiedź. Podana droga 10 m w ciągu drugiej sekundy może oznaczać przemieszczenie minus 10 metrów, czyli lot 10 m jeszcze cały czas pod górę. Wtedy w pierwszej sekundzie byłoby minus 20 metrów czyli 20 m pod górę, przy prędkości początkowej 25 m/s. Wybieramy w takim razie **odpowiedź E**.

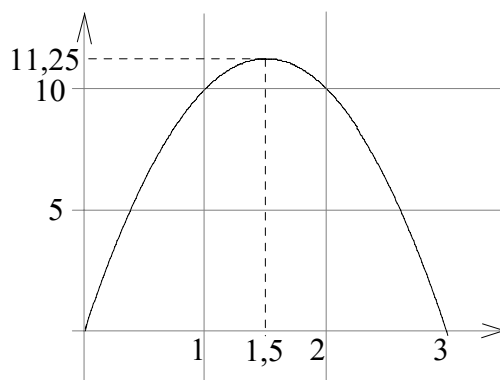
Tak w zacytowanych dwóch jak i w pozostałych trzech zadaniach tej „serii” zadaliśmy o to, by konflikt „droga czy przemieszczenie” nie utrudniał rozwiązania, bo gdyby zamiast „pokonał drogę” powiedzieć „przemieścił się o”, niczego by to nie zmieniło. Ze konflikt realnie zagraża, przekonali nas recenzenci, którzy oprotowali poniższe zadanie, szykowane wstępnie do zestawu dla I klasy liceum:

29. *Rzucony pionowo w górę kamień w ciągu drugiej sekundy lotu pokonał drogę 2,5 m. Jaką drogę przebył ten kamień w ciągu pierwszej sekundy lotu? Przyjmij  $g = 10 \text{ m/s}^2$  i pomini opory ruchu.*

*A. 15 m; B. 10 m; C. 7,5 m; D. 5 m; E. Dane są sprzeczne.*

Zauważmy, że przy locie wyłącznie w górę lub wyłącznie w dół nie jest możliwe przebycie w ciągu jednej sekundy drogi mniejszej niż 5 m. Tyle wynika ze wzoru  $\frac{gt^2}{2}$  na wartość przemieszczenia podczas spadku bez prędkości początkowej (możemy stosować ten wzór także dla rzutu w górę, rozpatrywanego „wstecz w czasie”). Oznacza to, że kamień osiągnął maksymalne wzniesienie w ciągu drugiej sekundy lotu. Rozróżnienie droga–przemieszczenie ma teraz zasadniczy wpływ na rozumienie zadania. Nam oczywiście chodziło o drogę w sensie używanym powszechnie, jak się zdaje, w nauczaniu szkolnym. Recenzenci jednak nie byli przekonani co do jednoznaczności tego terminu.

Rozwińmy nasze zadanie do końca. Zauważyliśmy już wyżej, że 2,5 m to akurat dwa razy 1,25 m, co jest wartością  $\frac{gt^2}{2}$  dla  $t = 0,5$  s. Zatem momentem maksymalnego wzniesienia kamienia była połowa drugiej sekundy lotu:



Droga przebyta w ciągu pierwszej sekundy to zatem różnica wartości  $\frac{gt^2}{2}$  dla  $t = 1,5$  s i  $t = 0,5$  s. Ta różnica wynosi 10 m. **Odpowiedź B.** Warto przy okazji zauważyć, że 2,5 m to minimalna wartość drogi, jaką pionowo rzucone ciało może przybyć w ciągu jednej sekundy.

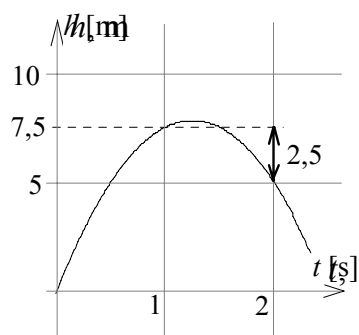
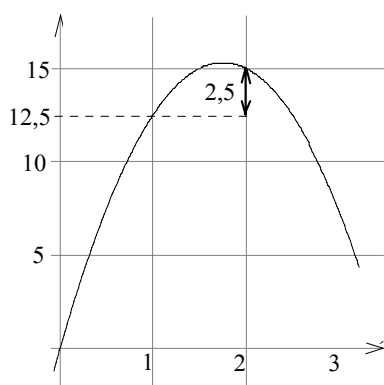
Jeśli ktoś nie zauważył od razu owego szczególnego układu danych, musiał rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} t_g + t_d = 1 \text{ s} \\ \frac{gt_g^2}{2} + \frac{gt_d^2}{2} = 2,5 \text{ m} \end{cases}$$

gdzie  $t_g$ ,  $t_d$  oznaczają części drugiej sekundy odpowiadające ruchowi „jeszcze” w górę i „już” w dół. Tak czy owak, wychodzi  $t_g = t_d = 0,5$  s.

W zadaniu należało zatem koniecznie odróżnić drogę jako długość śladu od wartości przemieszczenia, czyli odległości pomiędzy punktem początkowym a końcowym danej fazy ruchu. Zauważmy, że nawet popularne określenie drogi jako „długości toru” jest nieprecyzyjne i wymaga właściwego rozumienia, bo przecież gdy ciało robi dwa okrążenia kołowego toru o promieniu  $r$ , to droga wynosi  $4\pi r$ , a długość toru  $2\pi r$ .

Wracając do naszego zadania, próbowaliśmy (bezsukutecznie) przebłagać naszych recenzentów dodatkiem „Uwaga: pojęcia drogi i przemieszczenia należy odróżnić”. Ale tak naprawdę istniało jeszcze jedno zabezpieczenie przed nieodpowiednią interpretacją. Otóż przy interpretacji „wartość przemieszczenia równa 2,5 m” otrzymuje się DWIE możliwości:



z których tylko JEDNA (7,5 m) była wymieniona pośród podpowiedzi. A reguły naszego konkursu wykluczają tego rodzaju niejednoznaczne sytuacje.