

KĄCIK ZADAŃ

Odgłosy z jaskini (9) – Elektrostatyczna pułapka

Adam Smólski

I Społeczne LO w Warszawie

Ostatnim razem było o „zjawisku odrzutu” w postaci odrzucania – z różnych powodów – kandydujących do „Lwiątko” zadań. Teraz chciałbym opowiedzieć o zadaniu–pułapce, w którą o mało nie wpadliśmy w tym roku.

Zadanie 14 w wersji 1 zestawu dla drugich klas licealnych brzmiało:

Powierzchnia kuli z nieprzewodzącego materiału naładowana jest ładunkiem elektrycznym Q o stałej gęstości powierzchniowej. Po zbliżeniu małej kulki, niosącej ładunek q , stwierdzono, że duża kula oddziałuje na małą kulkę siłą F . Gdyby takim samym ładunkiem Q naładowano kulę z metalu i na taką samą odległość zbliżono małą kulkę niosącą ładunek q , siła oddziaływania miałaby wartość większą ($>$), mniejszą ($<$), czy taką samą ($=$) jak F ?

- A. $>$.
- B. $<$.
- C. $=$.
- D. $>$, jeśli znaki Q i q są jednakowe, $<$, jeśli przeciwne.
- E. $<$, jeśli znaki Q i q są jednakowe, $>$, jeśli przeciwne.

Chodziło o efekt zdawałoby się oczywisty: przy jednakowych znakach Q i q zbliżenie q spowoduje – na metalowej kuli – częściowe odepchnięcie ładunku Q i w rezultacie ładunki znajdą się efektywnie dalej od siebie, niż dla kuli nieprzewodzącej, na której ładunek się nie przemieści. Poprawna miała być zatem odpowiedź E.

Zadanie przeszło gładko przez pierwsze recenzje. Z góry zastrzegam: nie mam ani cienia pretensji do naszych wspaniałych recenzentów, odsiewających co roku skutecznie całe masy głupstw, jakie produkują w dobrej wierze autorzy zadań. Chcę tylko pokazać, jak zdradliwie taka dobra wiara może się udzielać.

Wreszcie coś zaniepokoiło jednego recenzentów drugiej generacji: „Odpowiedź E nie zawsze jest prawdziwa, gdy znaki są jednakowe! Przecież w wyniku zmiany rozkładu ładunków na kuli przewodzącej może w tym przypadku nastąpić zmiana zwrotu siły (może się ona stać przyciągająca)”. No tak, gdy ładunek Q jest nieduży, nasze wcześniejsze rozumowanie zawodzi! Zmieniliśmy, dodając to, co wytłuszczone poniżej:

14. Powierzchnia kuli z nieprzewodzącego materiału naładowana jest ładunkiem elektrycznym Q o stałej gęstości powierzchniowej. Po zbliżeniu małej kulki, niosącej **niewielki (w porównaniu z Q)** ładunek q , stwierdzono, że duża kula oddziałuje na małą kulkę siłą F . Gdyby takim samym ładunkiem Q naładowano kulę z metalu i na taką samą odległość zbliżono małą kulkę niosącą ładunek q , siła oddziaływania miałaby wartość większą ($>$), mniejszą ($<$), czy taką samą ($=$) jak F ?

A. $>$.

B. $<$.

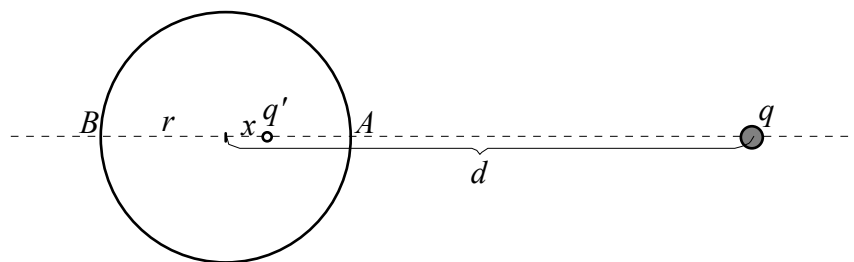
C. $=$.

D. $>$, jeśli znaki Q i q są jednakowe, $<$, jeśli przeciwne.

E. $<$ jeśli znaki Q i q są jednakowe, $>$, jeśli przeciwne.

Recenzenci trzeciej generacji połknęli to już gładko i my też zacieraliśmy ręce z dobrze wykonanej roboty. Olśnienie przyszło na dzień przed posłaniem zestawów do drukarni. Nawet po zmianie jest cały czas ŻLE! Dlaczego? Niech wyjaśnienie stanie się okazją do przypomnienia pięknej metody obrazów, pozwalającej dokładnie – i łatwo – opisać sytuację kuli i punkтового ładunku q .

Założmy na początek, jak to się tradycyjnie robi przy wprowadzeniu w metodę obrazów, że duża kula jest uziemiona. Wtedy pod nieobecność q będzie ona nienaładowana, a zbliżenie q spowoduje indukowanie na kuli ładunku q' , gwarantującego zerowy potencjał wypadkowego pola na jej powierzchni (potencjały dyskutujemy tu zawsze względem nieskończoności; Ziemia, jako kula o niedużym ładunku i bardzo wielkim promieniu, ma potencjał zero względem nieskończoności). Tytułem na razie hipotezy zapytajmy, czy wypadkowe pole na zewnątrz kuli nie jest tożsame z wypadkowym polem ładunku q i PUNKTOWEGO ładunku q' , umieszczonego gdzieś we wnętrzu kuli:

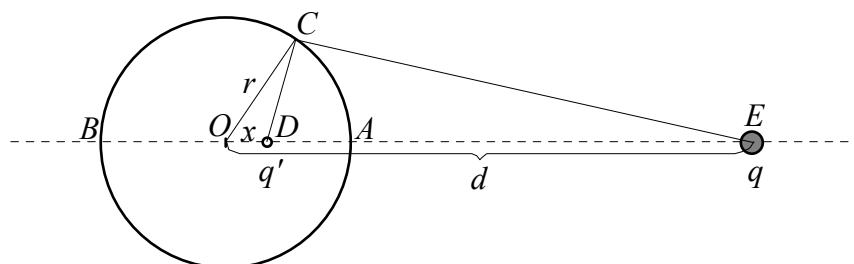


Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Potencjał ładunku punkтового jest odwrotnie proporcjonalny do odległości od niego. Aby w punktach A i B potencjał wynosił zero, potrzeba, by

$$\frac{r-x}{d-x} = \frac{-q'}{q} \quad \text{i} \quad \frac{r+x}{d+r} = \frac{-q'}{q}.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymamy $x = \frac{r^2}{d}$ i $q' = -\frac{r}{d}q$. Jak widać, punkt, w którym należałoby umieścić ładunek q' , to OBRAZ miejsca ładunku q w inwersji względem powierzchni kuli. To piękne przekształcenie geometryczne – inwersja – niestety słabo jest dzisiaj znane uczniom szkół, a szkoda.

Ale trzymajmy się fizyki. Nie pokazaliśmy jeszcze, że w każdym punkcie sfery wypadkowy potencjał wynosi zero, trzeba to teraz sprawdzić.



Używając oznaczeń z rysunku, zauważmy, że trójkąty OCD i OEC są podobne. Wynika to z tego, że mają wspólny kąt COE i $\frac{x}{r} = \frac{r}{d}$. Skalą podobieństwa jest $\frac{OC}{OE} = \frac{r}{d}$. A zatem także $\frac{CD}{CE} = \frac{r}{d} = \frac{-q'}{q}$. To oznacza, że potencjały pochodzące od q i q' są w punkcie C przeciwne. Czyli wypadkowy potencjał w C wynosi zero.

Zagadnienie kuli uziemionej jest więc rozwiązane. Jeśli odłączymy uziemienie i kula jest początkowo nienaładowana, zbliżenie ładunku q spowoduje przegrupowanie nośników ładunku na kuli, jednak jej całkowity ładunek pozostanie równy zero, a potencjał na powierzchni w stanie równowagi musi być stały. Identyczne wypadkowe pole wywoła ładunek q , punktowy ładunek q' jak powyżej i trzeci punktowy ładunek $-q'$ umieszczony w środku kuli. Jeśli wreszcie kula jest nieuziemiona i początkowo naładowana ładunkiem Q , to identyczne wypadkowe pole wywoła ładunek q , punktowy ładunek q' jak powyżej i trzeci punktowy ładunek $-q' + Q$ umieszczony w środku kuli. Mamy więc całkiem ogólne rozwiązanie naszego problemu.

Jakie wnioski wypływają z tego rozwiązania dla lwiątkowego zadania? Ano takie, że gdy ładunek q , choćby bardzo mały w porównaniu z Q , zbliżamy do powierzchni kuli, to jego obraz q' także się do niego zbliża, i te dwa ładunki, przeciwnego znaku i prawie już równej wartości bezwzględnej, przyciągają się siłą dążącą do nieskończoności w miarę, gdy d zbliża się do r . Znak Q nie ma na to wpływu, bo ładunek Q „zostaje” w środku kuli, podczas gdy q i q' robią się nieskończenie bliskie. Gdy znaki Q i q są przeciwne, siła (przyciągania) w miarę zbliżania od razu rośnie. Gdy znaki Q i q są zgodne, siła (odpychania)

w miarę zbliżania zrazu maleje, staje się równa zero (dla jakiego d ? – to dodatkowe zadanie dla Czytelników), po czym już jako siła przyciągania rośnie. Ładne, prawda?

Tym razem ustrześliśmy się wpadki. Ale pewnie jeszcze nieraz zdarzą się potknięcia, bo człowiek jest gapa a fizyka jest trudna. Piszę te słowa tuż przed tegoroczną maturą, drżąc, co tym razem wyskoczy. Nie z powodu możliwych wpadek, bo te właśnie są rzeczą ludzką, tylko z powodu praktyki ich tuszowania, której doświadczyliśmy ze strony CKE w ubiegłych latach. Ale nie zapeszajmy, może tym razem się uda.

A zadanie 14 przekształciliśmy – w ostatniej już chwili – do postaci następującej:

14. Powierzchnia kuli z nieprzewodzącego materiału naładowana jest ładunkiem elektrycznym Q o stałej gęstości powierzchniowej. Po zbliżeniu małej kulki, niosącej ładunek q , stwierdzono, że duża kula oddziałuje na małą kulkę siłą F . Gdyby takim samym ładunkiem Q naładowano kulę z metalu i na taką samą odległość zbliżono małą kulkę niosącą ładunek q , siła oddziaływania miałaby wartość większą ($>$), mniejszą ($<$), czy taką samą ($=$) jak F ?

A. Zawsze $>$.

B. Zawsze $<$.

C. Zawsze $=$.

D. Na pewno $>$, jeśli znaki Q i q są jednakowe.

E. Na pewno $>$, jeśli znaki Q i q są przeciwne.