KĄCIK ZADAŃ

Odgłosy z jaskini (4) – Orbity eliptyczne

Adam Smólski
I Społeczne LO w Warszawie

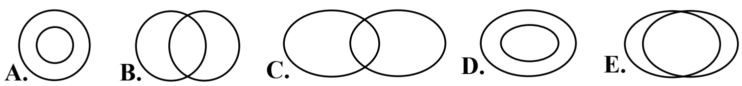
Nowym czytelnikom tej rubryki spieszę wyjaśnić, że „jaskinia” jest pracownią fizyczną w podziemiach szkoły na Bednarskiej w Warszawie, gdzie Polsko-Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiątko” ma swoją siedzibę, biuro i magazyn. A „odgłosy”, za łaskawą zgodą Redakcji *Fotonu*, są zarówno relacją z konkursowej „kuchni”, jak i próbą rozwinięcia pewnych lwiątkowych tematów, interesujących lub – przyznaję – kontrowersyjnych z punktu widzenia szkolnej fizyki. Tym razem będzie o orbitach eliptycznych w problemie Keplera.

***

Ale zacznijmy od „kuchni”. Listę poprawnych odpowiedzi „Lwiątka” ogłaszamy na stronie internetowej Konkursu następnego dnia po zawodach. Jest zatem paręnaście godzin zwłoki, podczas których w „Księdze gości” na tejże stronie panuje spory ruch. Ten i ów licytuje się, ile to punktów zdobędzie, a wszyscy nas popędzają. Wreszcie wywieszamy odpowiedzi i ruch na chwilę zamiera... po czym dopiero mamy co czytać! „Co to ma być!”, „Policzcie to jeszcze raz!”, „Dali zadania, których sami nie umieją rozwiązać!” itp. Cierpliwie przekonujemy, że odpowiedzi są, NIESTETY, dobre.

W 2006 roku taką właśnie konsternację wywołało zadanie 13 z zestawu dla klas III liceum:

Składniki pewnej gwiazdy podwójnej mają równe masy. Jak mogą wyglądać ich tory, narysowane w płaszczyźnie ich ruchu?

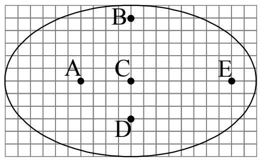


Poprawną odpowiedzią było C. Obie gwiazdy orbitują wokół wspólnego środka masy, który zatem musi być **wspólnym ogniskiem obu** eliptycznych orbit. To nie budziło wątpliwości, natomiast oponenci nie mogli uwierzyć, że sytuacja wygląda nie jak E, ale właśnie jak C. My oczywiście, szkicując sytuację C, przestrzegaliśmy geometrycznych reguł, określających położenie ogniska.

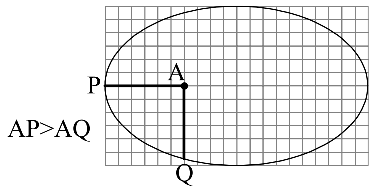
Skąd więc to niedowierzanie? Ano z zapatrzenia się w byle jakie ilustracje w podręcznikach i zbiorach zadań, gdzie położenie przyciągającego centrum wewnątrz orbity zaznaczane bywa w sposób rażąco błędny. Nie będę wskazywał palcem, ale kolegów nauczycieli zachęcam do przejrzenia posiadanych książek szkolnych pod tym kątem. Można się nieźle ubawić...

Ktoś powie, że w ten sposób przerzuciliśmy winy autorów tych publikacji na Bogu ducha winnych uczestników Konkursu. Ale temat nie był w „Lwiątku” nowy: w 2005 roku uczniowie 3. klasy gimnazjum i I klasy liceum otrzymali następujące zadanie:

Rysunek pokazuje eliptyczną orbitę planety wokół gwiazdy.
W którym punkcie może być gwiazda?

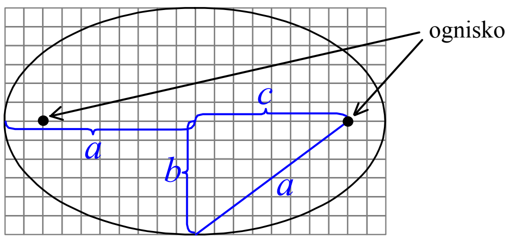


Poprawną odpowiedzią jest E. Bynajmniej nie oczekiwaliśmy znajomości ścisłych geometrycznych proporcji. Jedyny „sensowny” kontrkandydat, punkt A, jest ewidentnie niedobry z uwagi na odległość od punktów elipsy, która liczona chociażby pionowo w górę lub w dół byłaby mniejsza niż odległość od ewentualnego perycentrum z lewej:



Kto się zatem do „Lwiątka” przygotowywał w najbardziej odpowiedni sposób – ćwicząc na zestawach z ubiegłych lat – ten miał skąd się dowiedzieć, jak to z tym ogniskiem jest.

Uczniów liceum nie zawadzi oczywiście zaznajomić z dokładnymi proporcjami. Mianowicie, elipsa o półosiach a i b (przy $a > b$) ma ogniska położone na dłuższej osi w odległości $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ od środka:

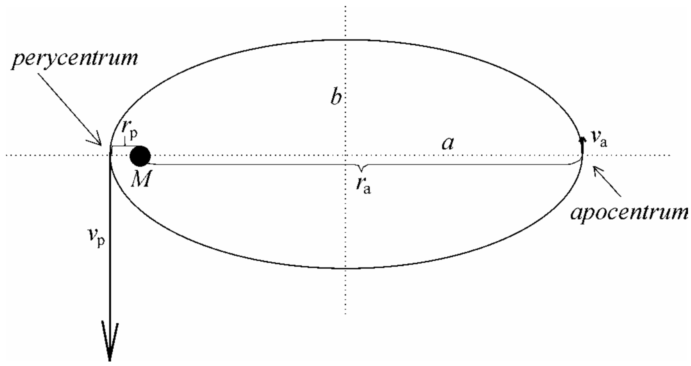


Miarą „spłaszczenia” elipsy jest tzw. mimośród $e = \frac{c}{a}$. W tablicach astronomicznych podaje się na ogół a i właśnie e.

Typowe licealne zadania „z grawitacji” formułowane są dla orbit kołowych. Najwyżej informujemy przy okazji III prawa Keplera, jak brzmi jego ogólna wersja. Uczniowie nabierają przekonania, że orbity eliptyczne to jakaś wyższa, uniwersytecka szkoła jazdy, dla nich niedostępna. Tak być nie musi.

Chciałbym w dalszym ciągu tego artykułu pokazać, co sam staram się robić na ten temat na lekcjach z uczniami grupy rozszerzonej. Okazuje się to w praktyce całkiem przystępne.

Na początek stawiam pytanie, w którym z punktów – perycentrum, czy apocentrum – satelita ma większą prędkość. Uczniowie nie mają wątpliwości, że $v_p > v_a$, ale muszą to wyjaśnić. Uprzedzam, że oczekuję znalezienia aż czterech powodów i zdradzam „w zaufaniu”, że dwa z tych powodów to pewne zasady zachowania.



I tak:

- powód pierwszy to ten, że w obu punktach satelita zakręca pod działaniem siły grawitacji po zakręcie o takiej samej krzywiźnie, ale w apocentrum ta siła grawitacji jest mniejsza niż w perycentrum. Mniejsza siła dośrodkowa przy tym samym promieniu oznacza mniejszą prędkość.
- powód drugi to ten, że na łuku orbity pomiędzy apocentrum i perycentrum siła grawitacji tworzy z wektorem prędkości kąt ostry, zatem satelita jest przyspieszany, a w drodze powrotnej do apocentrum hamowany.
- powód trzeci to zasada zachowania energii: $\frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_a}$,

  gdzie *M* to masa centrum przyciągającego (duża na tyle, by można je było uznać za nieruchome w inercjalnym układzie odniesienia), *m* – masa satelity. Z $r_p < r_a$ wynika $v_p > v_a$.
- powód czwarty to zasada zachowania momentu pędu: $mv_p r_p = mv_a r_a$.

  Stąd już łatwo i konkretnie: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} > 1$.

O zasadzie zachowania momentu pędu warto powiedzieć wcześniej jako o źródle II prawa Keplera. Występująca w nim „prędkość polowa" to nic innego, jak moment pędu podzielony przez podwojoną masę satelity.

Następnie stawiam zadanie znalezienia wartości v_p, v_a przy danych *M*, *a* i *e*. I odrobinę wpuszczam uczniów w maliny. Bowiem pierwszym ich odruchem, na który im pozwalam, jest liczenie v_p, v_a z równań takich, jakie przyzwyczaili się stosować dla orbit kołowych:

$$\begin{cases} \dfrac{m{v_a}^2}{r_a} = \dfrac{GmM}{{r_a}^2} \\ \dfrac{m{v_p}^2}{r_p} = \dfrac{GmM}{{r_p}^2} \end{cases}$$

skąd tak jak dla orbit kołowych

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p}}\ .$$

Uczniowie się cieszą, że rozwiązali problem, na co zwracam im delikatnie uwagę, że obliczone wartości nie spełniają $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p}$.

Po krótkiej zadumie trafiamy na właściwy trop:

$$\begin{cases} \dfrac{m{v_a}^2}{2} - \dfrac{GmM}{r_a} = \dfrac{m{v_p}^2}{2} - \dfrac{GmM}{r_p} \\ mr_a v_a = mr_p v_p \end{cases},$$

skąd

$$v_a = \sqrt{2GM\frac{r_p}{r_a(r_a + r_p)}}, \quad v_p = \sqrt{2GM\frac{r_a}{r_p(r_a + r_p)}}\ .$$

Należy oczywiście wyjawić, co było źle w poprzednim podejściu. r_p i r_a to **nie są promienie krzywizny** orbity w rozważanych punktach (ewidentnie w obu miejscach jednakowe), zatem nie można ich wstawiać do wzoru na siłę dośrodkową.

Wstawiamy r_p i r_a wyrażone przez dużą półoś i mimośród:

$$r_a = a(1+e), \quad r_p = a(1-e),$$

(przy okazji zauważmy, że $a = \dfrac{r_p + r_a}{2}$, $b = \sqrt{r_p r_a}$)

co daje $$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}}\ ,\ v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}}\ .$$

Przy $e = 0$ dostajemy znany wzór na prędkość dla orbity kołowej.

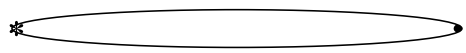
Jest to dobry moment, by policzyć całkowitą energię satelity na orbicie. Wychodzi, nawet nieco nieoczekiwanie prosto, $-\frac{GMm}{2a}$.

Ciągle jednak nie „dobraliśmy się" do okresu obiegu, a przecież celem miało być III prawo Keplera. Czas na chytry pomysł. Stała prędkość polowa to jak wspominaliśmy $\frac{1}{2}v_p r_p$, czyli $\frac{1}{2}\sqrt{GMa(1-e^2)}$. Z taką prędkością w czasie jednego okresu T zakreślane jest pole elipsy. Wzór na pole elipsy, πab, uczniowie są w stanie odkryć sami, na zasadzie „spłaszczenia" koła w stosunku $\frac{b}{a}$.

A zatem
$$\frac{1}{2}\sqrt{GMa(1-e^2)} \cdot T = \pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}\ ,$$
skąd
$$T = \frac{2\pi \cdot a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$
lub w wersji zwyczajowo stosowanej dla III prawa Keplera:
$$\frac{T^2}{a^3} = const\,.$$

Jeśli na lekcjach starczy czasu, można i warto utrwalić pokazane metody i wyniki za pomocą łatwych i trudniejszych zadań o orbitach eliptycznych. O tym może napiszę innym razem. Zacytuję tylko na koniec jedno naprawdę piękne zadanie z „Lwiątka 2005", właśnie na zastosowanie III prawa Keplera w ogólnej wersji:

Wysyłamy sondę do badania atmosfery Słońca, wprowadzając ją na bardzo wydłużoną orbitę, której aphelium znajduje się w pobliżu Ziemi, a peryhelium – tuż za Słońcem.



Sonda doleci do Słońca po czasie równym w przybliżeniu (w latach)

A. $\frac{1}{8}$, B. $\frac{\sqrt{2}}{8}$, C. $\frac{1}{4}$, D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$, E. $\frac{1}{2}$.

Pozwolę sobie nie zdradzać rozwiązania. Wszystkie rozwiązania i tak są dostępne w wydawanych przez „Lwiątko" broszurkach, a uroda powyższego zadania silniej do czytelników przemówi, jeśli je sami rozwiążą. Do czego gorąco zachęcam.